**HÌNH HỌC LỚP 9**

**ÔN LUYỆN THI VÀO LỚP 10 THPT**

**Bài 1.** Cho đường tròn (O) đường kính AD, dây BC không cắt đường kính AD (B thuộc cung AC). Gọi H là giao điểm của AC và BD, K là hình chiếu của H trên AD. Tia BK cắt đường tròn (O) tại F. CF cắt AD tại J.

 1) Chứng minh tứ giác A, B, H, K nội tiếp.

 2) Chứng minh 

 3) Chứng minh KH // FC.

 4) Chứng minh .

 **5)** **Dành cho HS muốn đạt điểm 9** 

 Gọi Q là hình chiếu của F lên đường thẳng BD. Gọi I là trung điểm của BF. Chứng minh 3 điểm I, J, Q thẳng hàng (gợi ý: Chứng minh IJ // BC và IQ // BC)

 

 **Hình vẽ Bài 1 Hình vẽ Bài 2**

**Bài 2.** Cho đường tròn , đường kính . Dây vuông góc với đường kính  tại  khác ,  là một điểm thuộc cung nhỏ  ( khác  và );  cắt  tại . Đường thẳng đi qua  song song với , cắt đường thẳng  và  lần lượt tại  và .

 1) Chứng minh: Tứ giác  nội tiếp đường tròn.

 2) Chứng minh: là trung điểm của  và 

 3) Chứng minh  và 

 4) Chứng minh  và 

 **5)** **Dành cho HS muốn đạt điểm 9** 

 Lấy  là trung điểm của đoạn thẳng . Chứng minh D, G, E thẳng hàng (gợi ý: Chứng minh tứ giác DIEK là hình chữ nhật).

**Bài 3:** Cho đường tròn (O) có AB là dây cung không đi qua tâm và I là trung điểm của dây AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm M khác điểm A. Vẽ hai tiếp tuyến MC và MD đến (O) (tiếp điểm C thuộc cung nhỏ AB, tiếp điểm D thuộc cung lớn AB).

 1) Chứng minh tứ giác OIMD nội tiếp được đường tròn.

 2) Chứng minh .

 3) Đường thẳng OI cắt cung nhỏ AB của (O) tại điểm N, giao điểm của hai đường thẳng DN và MB là E. Chứng minh  cân tại M.

 **4)** **Dành cho HS muốn đạt điểm 9** 

 Gọi F là giao điểm của đường thẳng OI và đường thẳng DC. Chứng minh 

 Gợi ý: Cần chứng minh  vuông tại A để áp dụng hệ thức lượng:

 + Chứng minh 

 + Chứng minh  đồng dạng với  vuông tại A.

**** 

 **Hình vẽ Bài 3 Hình vẽ Bài 4**

**Bài 4:** Cho nửa đường tròn (O; R), đường kính AB, C là một điểm thuộc nửa đường tròn sao cho AC < BC. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C vẽ tiếp tuyến Bx của nửa đường tròn (O), từ điểm O kẻ đường thẳng vuông góc với dây BC tại H và cắt tiếp tuyến Bx tại D. Đường thẳng AD cắt nửa đường tròn (O) tại điểm E.

 1) Chứng minh tứ giác BHED là tứ giác nội tiếp.

 2) Chứng minh 

 3) Chứng minh 

 **4)** **Dành cho HS muốn đạt điểm 9** 

 Gọi I là trung điểm của HD, BI cắt nửa đường tròn (O) tại F. Chứng minh HF vuông góc với BI.

 Gợi ý: + Gọi G là trung điểm của HB, chỉ ra G là trực tâm của  bằng cách chứng minh 

 + Suy ra OG  hay 

 + Chỉ ra OG // AH, suy ra AH , mà AF  (do  là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

 + Khi đó A, H, F thẳng hàng, suy ra HF vuông góc với BI.

**Bài 5.** Cho điểm M nằm bên ngoài đường tròn (O; R). Từ M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn đó (A và B là tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng song song với MB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là C; MC cắt đường tròn (O) tại điểm D (D khác C). Tia AD cắt MB tại E.

 a) Chứng minh: 4 điểm M, A, O, B cùng thuộc một đường tròn.

 b) Chứng minh: .

 c) Chứng minh: .

 d) Chứng minh:  (gợi ý dựa vào AC // MB để suy ra góc so le trong bằng nhau, dựa vào (O) suy ra góc tạo bởi tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau).

 e) Chứng minh: E là trung điểm của MB (gợi ý chứng minh  đồng dạng với  để suy ra , từ đó suy ra điều phải chứng minh)



**Bài 6.** Từ một điểm  nằm ngoài đường tròn , kẻ hai tiếp tuyến  với đường tròn  (là hai tiếp điểm). Gọi  là giao điểm của hai đường thẳng  và . Qua  kẻ cát tuyến  với đường tròn  (), sao cho tia  nằm giữa hai tia  và 

 a) Chứng minh đường thẳng  vuông góc với đường thẳng  tại H.

 b) Chứng minh .

 c) Đường phân giác của cắt đường thẳng  tại  và cắt đường tròn tại điểm thứ hai . Chứng minh  (gợi ý: Chỉ ra  là điểm chính giữa cung )

 d) Chứng minh:  (gợi ý chứng minh  bằng cách chỉ ra  cân tại A, và chứng minh )

 e) Đường thẳng  cắt đường thẳng và đường thẳng  lần lượt tại và . Chứng minh  (gợi ý: Chỉ ra ON vuông góc với DE tại I, từ đó chỉ ra tứ giác OHKI nội tiếp, từ đó suy ra , từ đó suy ra  đồng dạng với , suy ra điều phải chứng minh)

****

**Bài 7.** Cho đường tròn (O; R) và một điểm M nằm ngoài đường tròn, kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm). Kẻ đường kính AC của (O), dây cung AB vuông góc với OM tại H.

 1) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp được đường tròn, xác định tâm của đường tròn này.

 2) Chứng minh MB là tiếp tuyến của đường tròn (O).

 3) Kẻ dây CN của (O) đi qua H. Chứng minh .

 4) Tia MN cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Chứng minh 3 điểm B, O, D thẳng hàng.

 5) Gọi J là giao điểm của AB và ND, I là giao điểm của MO và NB. Chứng minh IJ // DB.



**Bài 8.** Cho đường tròn, đường kính  Gọi  là điểm cố định trên đoạn . Dựng đường thẳng  qua  vuông góc với  Điểm  di động trên đường thẳng  sao cho  nằm ngoài   cắt  tại điểm thứ hai   cắt  tại  Đường tròn ngoại tiếp tam giác  cắt  tại điểm thứ hai là 

 a) Chứng minh: tứ giác  nội tiếp.

 b) Chứng minh: 

 c) Chứng minh: F là trực tâm của 

 d) Chứng minh:  thuộc đường tròn  (gợi ý : Chứng minh  và  (t/c trực tâm), suy ra B, N, F thẳng hàng hay BN  AC tại N, nên , mà AB là đường kính (O), suy ra đpcm)

 e) Chứng minh:  là tia phân giác của  (gợi ý: Dựa vào tứ giác nội tiếp NCEF chỉ ra , Chỉ ra tứ giác BIFE nội tiếp suy ra . Từ đó suy ra điều phải chứng minh).



**Bài 9.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AD của tam giác ABC và đường kính AK của (O). Gọi F là chân đường vuông góc kẻ từ điểm C đến đường thẳng AK. Lấy M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Gọi E là chân đường vuông góc kẻ từ điểm B đến đường thẳng AK

1) Chứng minh tứ giác ADFC là tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh DF // BK.

3) Chứng minh .

4) Chứng minh ΔMDF cân tại M.

5) Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF.

**Hướng dẫn**



 1) Chứng minh: Tứ giác ADFC nội tiếp.

 Chứng minh được: ∠ADC = ∠AFC = 900. Mà D, F là 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AC

 ⇒ Tứ giác ADFC nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

 2) Chứng minh DF // BK

 Chứng minh được: ∠CAF = ∠CDF nội tiếp chắn cung FC

 Chứng minh được: ∠CAF = ∠CBK nội tiếp chắn cung KC

 ⇒ ∠CDF = ∠CBK. Mà 2 góc ở vị trí đồng vị ⇒ DF // BK

 3) Chứng minh ∠DFM = ∠OCA

 Chứng minh được OM ⊥ BC (Liên hệ đường kính và dây) ⇒ Tứ giác OMFC nội tiếp ⇒ ∠MFO = ∠MCO (1)

 Vì tứ giác ADFC nội tiếp ⇒ ∠DFA = ∠DCA (2)

 Từ (1) và (2) ⇒ ∠DFM = ∠OCA

 4) Chứng minh ΔMDF cân tại M.

 Chứng minh ΔOAC cân tại O ⇒ ∠OCA = ∠OAC

 Vì tứ giác ADFC nội tiếp ⇒ ∠OAC = ∠MDF ⇒ ∠DFM = ∠MDF ⇒ ΔMDF cân tại M

 5) Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF.

 Ta có ΔMDF cân tại M (cmt) ⇒  (3)

 Chứng minh tứ giác BEOM nội tiếp ⇒ ∠MEO = ∠OBM

 Chứng minh ΔOBC cân tại O ⇒ ∠OBM = ∠OCM

 Vì tứ giác OMFC nội tiếp ⇒ ∠OCM = ∠OFM ⇒ ∠OEM = ∠OFM

 ⇒ ΔMEF cân tại M  (4)

 Từ (3) và (4) ⇒ ME = MD = MF ⇒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF.

 **Chú ý: Các ý 4 và 5 có thể chứng minh theo cách 2 như sau:**

4) Chứng minh ΔMDF cân tại M.

 Lấy P, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

 Chứng minh: MN là đường trung bình ΔABC ⇒ MN // AB ⇒ MN ⊥ BK ⇒ MN ⊥ DF (1)

 Vì tứ giác ADFC nội tiếp đường tròn tâm N ⇒ ND = NF ⇒ N ∈ đường trung trực của DF (2)

 Từ (1)(2) ⇒ M ∈ đường trung trực của DF ⇒ ΔMDF cân tại M .



 5) Chứng minh M là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF.

 Chứng minh tứ giác ABDE nội tiếp ⇒ ∠EDM = ∠BAK

 Chứng minh ∠BAK = ∠BCK ⇒ ∠EDM = ∠BCK ⇒ DE // CK

 Chứng minh tương tự ⇒ PM là trung trực của DE

 ⇒ ΔMDE cân tại M ⇒ ME = MD = MF

 ⇒ M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF

**Bài 10.** Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB, MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C. Kẻ MH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi E là giao điểm của MB và OH. Gọi giao điểm của đường tròn (O) với đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K.

 1) Chứng minh tứ giác BOMH nội tiếp được đường tròn.

 2) Chứng minh HO là tia phân giác của góc MHB.

 3) Chứng minh .

 4) Chứng minh = , từ đó suy ra tứ giác BEKH nội tiếp.

 5) Chứng minh ba điểm  thẳng hàng.

**Hướng dẫn**



 **1) Chứng minh BOMH là tứ giác nội tiếp**

 \*Ta có: ()

 \*Ta có: ()

 \*Xét tứ giác có: . Mà hai góc này ở vị trí đối nhau

 Nên  là tứ giác nội tiếp

 **2) Chứng minh**  **là tia phân giác của góc** 

 Chứng minh 450. Suy ra 450

 Suy ra HO là tia phân giác góc MHB.

 **3) Chứng minh: ME.MH = BE.HC**

 Vì HO là tia phân giác của (1)

 Xét tam giác vuông tại M có MH là đường cao nên

 Từ (1) và (2) (đpcm)

 **4) Chứng minh = , từ đó suy ra tứ giác BEKH nội tiếp.**

 450 suy ra: 450 (3)

 Đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM có CM là đường kính.

 MB vuông góc với MC nên MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM.

 Suy ra: (4)

 Xét đường tròn (O) có: = 450 (5)

 Từ (3), (4), (5) suy ra: =

 Suy ra tứ giác BEKH nội tiếp.

 **5) Chứng minh ba điểm**  **thẳng hàng.**

 Tứ giác BEKH nội tiếp. Suy ra: = 1800 (6)

 Mà (cùng phụ góc MCB)

 Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác CHM có: . Suy ra (7)

 Từ (6) và (7) suy ra: = 1800

 Nên ba điểm E, K, C thẳng hàng.

**Bài 11.** Cho tam giác nhọn MNP (MN < MP) nội tiếp đường tròn (O; R). Ba đường cao MA, NB, PC cắt nhau tại H. Đường thẳng BC và đường thẳng NP cắt nhau tại I. Đường thẳng MI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K.

 1) Chứng minh 4 điểm N, C, B, P cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm J của đường tròn này.

 2) Chứng minh 

 3) Chứng minh **.**

 4) Chứng minh .

 5) Chứng minh 3 điểm K, H, J thẳng hàng.

**Hướng dẫn**

****

 **1)** Chứng minh 4 điểm N, C, B, P cùng thuộc một đường tròn và xác định tâm J của đường tròn này.

 Chỉ ra . Suy ra C thuộc đường tròn đường kính NP

 Chỉ ra . Suy ra C thuộc đường tròn đường kính NP

 Vậy 4 điểm N, C, B, P cùng thuộc đường tròn đường kính NP, tâm J là trung điểm NP.

 **2) Chứng minh** 

 Vì NCBP là tứ giác nội tiếp. Suy ra 

 Chỉ ra  . Suy ra tỉ lệ cạnh . Suy ra IB.IC = IN.IP

 Chỉ ra , Suy ra , Dẫn tới 

 Do đó

 **3) Chứng minh** 

 Theo kết quả ý 2) suy ra , Chỉ ra . Suy ra  hay**(đpcm)**

 **4) Chứng minh** **.**

 Có (cmt), suy ra tứ giác KMBC nội tiếp

 Mà tứ giác MBHC nội tiếp đường tròn đường kính MH.

 Suy ra K, M, C, H, B cùng thuộc đường tròn đường kính MH.

 Suy ra . **(đpcm)**

 **5) Chứng minh 3 điểm K, H, J thẳng hàng.**

 Vẽ đường kính MD của đường tròn O, suy ra , suy ra K, H, D thẳng hàng.

 Chứng minh NHPD là hình bình hành, suy ra H, J, D thẳng hàng.

 Suy ra K, H, J thẳng hàng.

**Bài 12.** Cho đường tròn (O) dây BC không đi qua tâm O. Trên cung lớn BC lấy điểm A sao cho AB < AC. Kẻ đường phân giác của  cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Từ M kẻ MD vuông góc với đường thẳng AB tại D, ME vuông góc với đường thẳng AC tại E, MI vuông góc với đường thẳng BC tại I. Gọi Q là giao điểm của AM và BC.

 1) Chứng minh tứ giác MIEC nội tiếp.

 2) Chứng minh  cân tại M.

 3) Chứng minh 

 4) Chứng minh .

 5) Chứng minh 3 điểm D, I, E thẳng hàng.



**Bài 13.** Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi K là trung điểm của đoạn AH. Đường thẳng đi qua K vuông góc với đường thẳng BK cắt đường thẳng AC tại N.

 1) Chứng minh tứ giác AEHF là tứ giác nội tiếp.

 2) Chứng minh .

 3) Kẻ đường kính BM của đường tròn (O). Chứng minh .

 4) Chứng minh .

 5) Chứng minh  đồng dạng với , từ đó suy ra 



**Bài 14.** Cho nửa đường tròn tâm (O) đường kính AB và điểm C cố địnhthuộc đoạn thẳng OA(C khác O và A), điểm M di động trên nửa đường tròn tâm (O) (M khác A và B). Trên nửa mặt phẳng bờ ABchứa điểm M vẽ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn (O). Đường thẳng qua M vuông góc MCcắt Ax, By lần lượt tại P và Q. Gọi E là giao điểm của AM với CP. Gọi F là giao điểm của BM với CQ.

 1) Chứng minh tứ giác APMC là tứ giác nội tiếp.

 2) Chứng minh tứ giác QBCM là tứ giác nội tiếp.

 3) Chứng minh .

 4) Chứng minh 

 5) Chứng minh EF // AB.



**Bài 15.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O), đường kính AB = 2R trên cạnh BC lấy điểm M ( M khác B và C) đường thẳng AM cắt đường tròn O tại D, đường thẳng BD cắt AC tại E đường tròn tâm I ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường kính AB tại điểm thứ hai là N. Cho đoạn thẳng CN cắt đường tròn (I) ở F.

 1) Chứng minh tứ giác CEDM nội tiếp đường tròn.

 2) Chứng minh ba điểm E, M, N thẳng hàng.

 3) Chứng minh DF // AE.

 4) Chứng minh  (gợi ý: Cần chứng minh , từ đó chứng minh )

 5) Chứng minh , từ đó suy ra  có giá trị không đổi.



**Bài 16.** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là hai tiếp điểm). Vẽ cát tuyến MCD với (O) sao cho MC < MD và tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. Gọi E là trung điểm của CD.

 1) Chứng minh tứ giác MEOB nội tiếp.

 2) Kẻ AB cắt MD tại I, cắt MO tại H. Chứng minh EA.EB = EI.EM.

 3) Chứng minh .

 4) Chứng minh ME.MI = MH.MO = MA2.

 5) Chứng minh EI.EM = R2 – OE2

 6) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với OA, cắt AE tại K. Chứng minh IK // AC.



**Bài 17.** Từ một điểm  ở ngoài đường tròn  vẽ hai tiếp tuyến,  với  (,  là hai tiếp điểm). Gọi  là giao điểm của  với , còn  là một điểm bất kì thuộc đoạn . Đường thẳng qua  vuông góc với  cắt các tia  và lần lượt tại  và .

 1) Chứng minh: 4 điểm  cùng thuộc một đường tròn.

 2) Chứng minh:  vuông góc với .

 3) Chứng minh: .

 4) Chứng minh: 

 5) Chứng minh: tam giác  là tam giác cân.



**Bài 18.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, AB < AC và nội tiếp đường tròn (O). Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Tia AD cắt đường tròn (O) ở K (K ≠ A). Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt đường thẳng FD tại M. Đoạn thẳng AM cắt đường tròn (O) tại I (I ≠ A).

1) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp.

2) Chứng minh tam giác CMD cân.

3) Chứng minh MD2 = MI.MA.

4) MD cắt BI tại N. Chứng minh .

5) Chứng minh ba điểm C, N, K thẳng hàng.

**Hướng dẫn**



 1) Chứng minh tứ giác AEHF nội tiếp.

 Do BE là đường cao nên 

 Do CF là đường cao nên 

 Khi đó  = 1800, suy ra tứ giác AFHE nội tiếp.

 2) Ta có  (góc nội tiếp và góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BC)

 Chứng minh được tứ giác ACDF nội tiếp nên 

 Do đó  ⇒ ΔCMD cân tại M.

 3) Chứng minh: MD2 = MI.MA.

 Chứng minh được ΔMIC ~ ΔMCA (g.g)

  (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) ⇒ MC2 = MI.MA ⇒ MD2 = MI.MA.

 4) Chứng minh .

 Ta có:  ⇒ 

 ⇒ tứ giác CIND nội tiếp .

 5) Chứng minh ba điểm C, N, K thẳng hàng.

 Do MD2 = MC2 = MI.MA và  chung ⇒ΔMDI ~ ΔMAD (c.g.c)

  hay 

 Từ  .

 Mà   suy ra hai tia CK và CN trùng nhau. Suy ra ba điểm C, N, K thẳng hàng.

**Bài 19.** Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ AH vuông góc với BC tại H và BE vuông góc với đường kính AD tại E.

 1) Chứng minh tứ giác ABHE nội tiếp.

 2) Chứng minh 

 3) Gọi J là giao điểm của đường thẳng BE với AC. Chứng minh .

 4) Gọi I là giao điểm của tia HE và AC. Chứng minh .

 5) Gọi M là trung điểm của BC, N là trung điểm của AB, Q là giao điểm của tia NM với AD. Chứng minh .



**Bài 20:** Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia BA lấy điểm C(C không trùng với B). Kẻ tiếp tuyển CD với đường tròn (O) (D là tiếp điểm), tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng CD tại E. Gọi H là giao điểm của của AD và OE, K là giao điểm của BE với đường tròn (O) (K không trùng với B).

 1) Chứng minh 4 điểm A, E, D, O cùng thuộc một đường tròn.

 2) Chứng minh  và .

 3) Cho  ,. Tính bán kính đường tròn (O).

 4) Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt CE tại M. Chứng minh OME cân tại M.

 5) Chứng minh .

 Gợi ý: Áp dụng định lý Ta-lét trong tam giác CEA ta có .

 

 Mà  nên suy ra  (đpcm).



**Bài 21:** Cho đường tròn tâm O và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. Điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC (với M khác B và C). Gọi I là giao điểm của AM và BC, J là hình chiếu của I trên AB.

 1) Chứng minh tứ giác BMIJ là tứ giác nội tiếp.

 2) Chứng minh 

 3) Chứng minh IJ là phân giác của .

 4) Chứng minh M, J, D thẳng hàng.



**Bài 22:** Cho đường tròn tâm O, đường kính BC. A là một điểm bất kì trên đường tròn (). H là hình chiếu của A trên BC. M, N theo thứ tự là hình chiếu của H trên AB, AC, MN cắt AH tại I

 1) Chứng minh rằng tứ giác AMHN là hình chữ nhật

 2) Chứng minh 4 điểm B, M, N, C cùng nằm trên một đường tròn.

 3) MN cắt AO tại K. Chứng minh 

 4) Chứng minh OA vuông góc với MN.

 5) Gọi O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BMNC. Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.



**Bài 23.** Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (O) (M, N thuộc (O)). Qua A vẽ một đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C phân biệt (B nằm giữa A, C). Gọi H là trung điểm của đoạn BC

 1) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp được đường tròn.

 2) Chứng minh 

 3) Gọi K là giao điểm của đoạn AO với (O). Chứng minh K là tâm đường tròn nội tiếp 

 4) Đường thẳng qua B song song với AM cắt đoạn thẳng MN tại E. Chứng minh tứ giác EBNH nội tiếp.

 5) Chứng minh rằng: EH // MC.



**Bài 24.** Cho nửa đường tròn (O) có đường kính BC. Điểm A bất kì thuộc nửa đường tròn sao cho AB < AC. Lấy điểm F trên dây AC (AF > FC), BF cắt (O) tại E.

 1) Chứng minh .

 2) Vẽ đường tròn đường kính BF cắt BC tại H. Chứng minh bốn điểm H, F, E, C cùng thuộc một đường tròn.

 3) Chứng minh  và .

 4) Chứng minh tổng  có giá trị không đổi.

 5) Gọi N là điểm đối xứng của H qua BE. Chứng minh A, N, E thẳng hàng.

 **Gợi ý:**

 Ta có N đối xứng với H qua BF nên N thuộc đường tròn đường kính BF, khi đó có tứ giác ABHN nội tiếp đường tròn đường kính BF, suy ra  (3)

 Ta có N đối xứng với H qua BF nên  tại trung điểm của NH, mà  (do  và B, F, E thẳng hàng)

  // CE  (hai góc đồng vị) (4)

 Xét tứ giác BAEC nội tiếp đường tròn (O)  (5)

 Từ (3), (4) và (5) suy ra , mà hai tia AN và AE thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BA

 Tia AN trùng với tia AE A, N, E thẳng hàng (đpcm).



**Bài 25.** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, AB < AC và nội tiếp đường tròn (O; R). Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC và M là trung điểm của cạnh BC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) cắt đường thẳng BC tại N.

 a) Chứng minh bốn điểm A, M, O, N cùng thuộc một đường tròn.

 b) Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tahwngr AO với đường tròn (O; R). Chứng minh: .

 c) Kẻ đường phân giác AD của tam giác ABC (D thuộc cạnh BC). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AD. Chứng minh NI vuông góc với AD.

 4) Tính độ dài FK và BC.

 **Gợi ý:** Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên  vuông tại F, mà   (cạnh góc vuông đối diện góc 30o) .

Chứng minh được , nên xét  vuông tại M ta có:

 

 5) Chứng minh  vuông cân.

 **Gợi ý:** Ta có FK // BC (cùng vuông góc với AF) nên  (hai cung chắn giữa hai dây song song)

  (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau của (O))

 Mà  và  và 

 Xét  vuông tại H có  nên  vuông cân tại H



**Bài 26.** Cho đường tròn (O; R) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A kẻ tiếp tuyến AB với (O; R) (B lf tiếp điểm). Kẻ đường kính BC, nối AC cắt (O) tại điểm thứ hai là E.

 1) Chứng minh .

 2) Qua A kẻ tiếp tuyến AM với (O) (M là tiếp điểm). Chứng minh rằng: MC // AO.

 3) Qua O kẻ đường vuông góc với MC cắt AM kéo dài tại K. Chứng minh KC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

 **Gợi ý:** Gọi H là giao điểm của OK và MC, chứng minh được 

  (c – g – c), mà  tại C

 KC là tiếp tuyến của đường tròn (O) (đpcm).

 4) Chứng minh IO vuông góc với BC.

 **Gợi ý:** Ta có  (cmt) và  (do (cmt)) nên AB // KC

 Tứ giác ABKC là hình thang vuông

 Gọi I là trung điểm của AK, mà O là trung điểm của BC

 IO là đường trung bình của hình thang ABKC

 IO // AB // KC  tại O (1)

 5) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AK.

 **Gợi ý:** Ta có MC // OA (cmt), mà  (giả thiết) nên vuông tại O

 Đường tròn đường kính AK ngoại tiếp , khi đó gọi I là trung điểm của AK thì IO là bán kính của đường tròn. (2)

 Từ (1) và (2) suy ra BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AK.



**Bài 27.** Cho đường tròn (O) bán kính R. Đường thẳng d không đi qua O và cắt đường tròn tại hai điểm A, B. Từ một điểm C trên d (A nằm giữa B và C) vẽ tiếp tuyến CN với đường tròn (N là tiếp điểm, N thuộc cung AB lớn). Gọi E là trung điểm của đoạn AB.

 1) Chứng minh bốn điểm C, E, O, N cùng nằm trên một đường tròn.

 2) Chứng minh .

 3) Gọi H là hình chiếu của điểm N trên OC. Chứng minh .

 4) Tia CO cắt đường tròn (O) tại hai điểm I và D (I nằm giữa C và D). Chứng minh 

 **Gợi ý:** Ta có  (cmt)

 (hai góc tương ứng); mà  (góc ngoài tại đỉnh O của ),  (do  cân tại O bởi ), 

  hay 

 Mặt khác  (góc ngoài tại một đỉnh và góc trong tại đỉnh đối diện của tứ giác ABDI nội tiếp đường tròn (O)).

 

 5) Chứng minh .

 **Gợi ý:**

Từ AI là phân giác trong  (tính chất) (3)

 Ta có  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) nên , mà AI là phân giác trong  (cmt)

 AD là phân giác ngoài tại đỉnh A của  (tính chất) (4)

 Từ (3) và (4) suy ra  (đpcm).



**Bài 28.** Cho đường tròn, hai đường kính  và  vuông góc với nhau. Gọi  là trung điểm của  cắt đường tròn tại .

 1) Chứng minh tứ giác  là tứ giác nội tiếp.

 2) Chứng minh BC là tia phân giác của .

 3) Chứng minh  là phân giác của  và tính .

 **Gợi ý:** Xét  vuông tại F có  (tỉ số lượng giác của góc nhọn)

 Xét (O) có hai đường kính CD và AB vuông góc nên 

  (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay 

  là phân giác của  của 

  (tính chất đường phân giác)

 Mặt khác E là trung điểm CO và 

 4) Đoạn  cắt  tại  và cắt  tại ,  cắt  tại . Chứng minh K là trọng tâm của , G là trọng tâm của .

 **Gợi ý:** Xét  vuông tại O, có  (tỉ số lượng giác góc nhọn và )

 Mà , mà 

 Mặt khác  là trung tuyến của 

 G là trọng tâm của  (đpcm)

 Mà DG cắt BC tại H

 H là trung điểm của BC.

 AH là trung tuyến của , mà CO cũng là trung tuyến của  và CO cắt AH tại K

 K là trọng tâm của  (đpcm)

 5) Chứng minh .

 **Gợi ý:** Xét K là trọng tâm của  và G là trọng tâm của 

  // AD (định lý Talet đảo), mà AD // CB

  // CB (đpcm)



**HÌNH HỌC LỚP 9**

**ÔN LUYỆN THI VÀO LỚP 10 THPT**

**Bài 1:** Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và AB < AC. Đường tròn (O) đường kính BC cắt cạnh AB và AC lần lượt tại F và E. Gọi H là giao điểm của BE và CF.

 1) Chứng minh bốn điểm A, E, H, F cùng thuộc một đường tròn.

 **Gợi ý:** 

 2) Kéo dài AH cắt BC tại K. Chứng minh BH.BE = BK.BC .

 **Gợi ý:** ∆BKH đồng dạng ∆BEC (g.g)

 3) Từ A kẻ các tiếp tuyến AM và AN đến đường tròn (O) với M và N là các tiếp điểm. Chứng minh  và .

 **Gợi ý:** ∆AHM đồng dạng ∆AMK (c.g.c); ∆AHN đồng dạng ∆ANK (c.g.c)

 4) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp EFK đi qua điểm O.

 **Gợi ý:**  nên EFKO là tứ giác nội tiếp.

 5) Chứng minh ba điểm M, H, N thẳng hàng.

 **Gợi ý:** Chỉ ra  nên 5 điểm A; M; K; O; N cùng thuộc đường tròn đường kính AO ⇒ ⇒ 3 điểm M, H, N thẳng hàng



**Bài 2:** Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Gọi K là trung điểm của BC

 1) Chứng minh: AEF đồng dạng với ABC.

 **Gợi ý:** Chỉ ra AEF đồng dạng với ABC (c.g.c) (vì A chung; ).

 2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

 **Gợi ý:** Qua điểm A kẻ tiếp tuyến xy của (O) ⇒ Ax ⊥ OA tại A

 Chỉ ra  nên EF // Ax. Vậy OA ⊥ FE

 3) Đường phân giác của góc FHB cắt AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh: .

 **Gợi ý:** Chỉ ra  và .

 4) Gọi I là trung điểm của MN, J là trung điểm của AH. Chứng minh tứ giác AFHI nội tiếp.

 **Gợi ý:** Từ ý 3) có ∆AMN cân tại A mà I là trung điểm của MN ⇒ AI ⊥ MN tại I

 ⇒ ⇒ AFHI là tứ giác nội tiếp.

 5) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

 **Gợi ý:** Chỉ ra 5 điểm A; F; H; I; E cùng thuộc đường tròn đường kính AH

 Xét ∆AMN cân tại A mà I là trung điểm của MN chỉ ra được  (\*)

 Chỉ ra  (\*\*)

 (\*) và (\*\*) ⇒ J; I; K thuộc đường trung trực của FE ⇒ I, J, K thẳng hàng



**Bài 3:** Cho tam giác ABC nhọn có các đường cao AD, BE.

 1) Chứng minh tứ giác ABDE nội tiếp

 **Gợi ý:** Chỉ ra 

 2) Đường tròn đường kính AC cắt BE tại M, đường tròn đường kính BC cắt AD tại N. Chứng minh tam giác CMN cân tại C.

 **Gợi ý:** Chỉ ra  và ⇒ Tam giác CMN cân tại C

 3) Gọi P, Q lần lượt là điểm đối xứng của D qua các cạnh AB, BE; PD cắt AB tại S; EB cắt QD tại K. Chứng minh KS // PQ.

 **Gợi ý:** Chỉ ra KS là đường trung bình của ∆DQP.

 4) Chứng minh ba điểm P, Q, E thẳng hàng.

 **Gợi ý:** Chỉ ra ⇒ KS // QE (đồng vị), kết hợp với KS // PQ.

 5) Chứng minh QE, AB và đường tròn đường kính AC đồng quy.

 **Gợi ý:** Gọi H là giao điểm của PE và AB. Chỉ ra 



**Bài 4:** Cho đường tròn (O; R), kẻ đường kính AB. Điểm M bất kì trên (O) sao cho MA < MB (M khác A, B). Kẻ MH  AB tại H. Vẽ đường tròn (I) đường kính MH cắt MA, MB lần lượt tại E và F.

 1) Chứng minh: Tứ giác AEFB nội tiếp.

 **Gợi ý:** Chỉ ra  (cùng cộng  bằng )

 2) Ba điểm E, I, F thẳng hàng.

 **Gợi ý:** Chỉ raEMFH là hình chữ nhật ⇒ EF đi qua tâm I

 3) Kẻ đường kính MD của đường tròn (O), MD cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai N (N  M). Chứng minh tứ giác BONF nội tiếp.

 **Gợi ý:** Chỉ ra  (cùng cộng  bằng )

 4) MD cắt EF tại K. Chứng minh: MK  EF.

 **Gợi ý:** Chỉ ra  ⇒ ∆FMN cân tại F

 ⇒ F là điểm chính giữa cung MN ⇒ FK ⊥ MN hay MK  EF

 5) Chứng minh MH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HKD.

 **Gợi ý:** Chỉ ra HIKO là tứ giác nội tiếp ⇒ . Gọi O’ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HKD. Chứng minh 



**Bài 5:** Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với A và B là hai tiếp điểm, vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O (C nằm giữa M và D), vẽ OE  CD tại E.

 1) Chứng minh: 5 điểm A, E, O, B, M cùng thuộc một đường tròn.

 2) Kẻ đường kính AK. Chứng minh rằng: MO // BK.

 3) Vẽ CF // AM (F thuộc AE), CD cắt AB tại I. Chứng minh: EFC đồng dạng với EIB.

 **Gợi ý:** Chỉ ra ; 

 4) Gọi AB cắt FC tại S. Chứng minh .

 **Gợi ý:** Chỉ ra SFEI là tứ giác nội tiếp.

 5) Chứng minh: FI vuông góc với CK.

 **Gợi ý:** Chỉ ra , kết hợp với ý 4) ⇒  ⇒ FI // AC ⇒ FI vuông góc với CK.

 

**Bài 6:** Cho BC là dây cung cố định của đường tròn (O; R). A là điểm trên cung lớn BC sao cho AB < AC. Tia phân giác Ax của BAC cắt BC tại D và cắt đường tròn (O) tại E, gọi K là giao điểm của OE và BC. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC kéo dài tại M, vẽ tiếp tuyến MF của đường tròn (O) với F là tiếp điểm.

 1) Chứng minh: Tứ giác OKMA nội tiếp được trong một đường tròn

 2) Chứng minh: MA = MD

 **Gợi ý:** Chỉ ra ⇒ ∆MAD cân tại M ⇒ MA = MD

 3) Chứng minh:  cân.

 **Gợi ý:** Chỉ ra MA = MD mà MA = MF ⇒ MD = MF ⇒ ∆MDF cân tại M

 4) Chứng minh: FD là tia phân giác của góc BFC.

 **Gợi ý:** , mà 

 5) Gọi S là giao điểm của FD và EK. Chứng minh S thuộc đường tròn (O).

 **Gợi ý:** Kẻ Fy là tia đối của tia FB

 ⇒  (cùng bù với )

 ⇒ FE là tia phân giác của góc CFy (2)

 Kết hợp với ý 4) ⇒ (góc tạo bởi hai tia phân giác của hai góc kề bù là góc vuông)

 ⇒ ES là đường kính của (O) ⇒ S ∈ (O)

